数理解析研究所講究録
第 1793 巻 2012 年 22-29

D 加群の積分アルゴリズムと近似零化イデアル

中山 洋将

NAKAYAMA HIROMASA

神戸大学大学院理学研究科/ JST CREST

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENC E, KOBE UNIVERSITY *

Abstract

パラメータつき積分の満たす微分方程式系を計算するアルゴリズムとして、D 加群の積分アルゴリズムがある。このアルゴリズムを実行するには、被積分関数の満たす holonomic な微分方程式系が必要であるが、一般にはこの計算は困難であることが多い。被積分関数が有理関数の場合について、被積分関数の近似零化イデアルを使うことで計算を高速に行うことが可能になった。その適用例として、smooth Fano polytope に付随する周期積分の満たす微分方程式系を計算した。

1 Smooth Fano Polytope とそれに付随する周期積分

この論文では、2,3 次元 smooth Fano polytope に付随する周期積分の満たす微分方程式系について、D 加群による積分アルゴリズムを用いた計算方法について考察する。

d 次元 smooth Fano polytope $\mathcal{P}$ とは次の条件を満たす polytope である。

1. d 次元の lattice polytope
2. 内部に原点を含む
3. dual polytope $\mathcal{P}^*$ が lattice polytope
4. 各 face が simplex
5. 各 facet の頂点が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$-基底

また、(1) — (3) の条件を満たすものを reflexive polytope、(4) の条件を満たすものを simplicial polytope と呼ぶ。

Øbro([11]) により 7 次元 smooth Fano polytope まで同型類のリストが与えられている。2, 3 次元 smooth Fano polytope の同型類のリストは次の通りである。(次のリストは Øbro([11]) に付属のプログラムの出力結果である。)

*nakayama@math.kobe-u.ac.jp

dim	index	vertices
2	0	(1,0), (0,1), (-1,-1)
2	1	(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)
2	2	(1,0), (0,1), (-1,1), (0,-1)
2	3	(1,0), (0,1), (-1,1), (1,-1), (-1,0)
2	4	(1,0), (0,1), (-1,1), (1,-1), (-1,0), (0,-1)
3	0	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,-1,-1)
3	1	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,-1)
3	2	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,-1,1), (0,0,-1)
3	3	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,-1)
3	4	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,-1,2), (0,0,-1)
3	5	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,-1,2), (0,1,-1), (0,0,-1)
3	6	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)
3	7	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,0), (0,0,-1)
3	8	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,0,-1), (0,-1,-1)
3	9	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)
3	10	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,1), (0,0,-1)
3	11	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,1,-1), (0,-1,0)
3	12	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,1), (0,1,-1), (0,-1,0)
3	13	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,1), (0,1,-1), (0,0,-1)
3	14	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,1,-1), (0,-1,0), (0,0,-1)
3	15	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (1,0,-1), (-1,0,0), (0,-1,0)
3	16	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (0,-1,1), (0,1,-1), (0,-1,0), (0,0,-1)
3	17	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,1), (1,0,-1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)

n 次元 k 番目の smooth Fano polytope $P_{n,k}$ に付随する周期積分とは

$$F_{n,k}(x) = \int_C f_{n,k}(x,t)^{-1} t_1^{-1} \cdots t_n^{-1} dt_1 \cdots dt_n$$

である。ここで $f_{n,k}(x,t)$ は、Smooth Fano Polytope $P_{n,k}$ の頂点 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ と原点 $a_{m+1} = O$ から、$f_{n,k}(x,t) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i t^{a_i}$ のように定める。x を固定し、$T_x = \{t \in (\mathbb{C}^*)^n \mid f(t,x) \neq 0\}$ とおく。積分路 C は $H_n(T_x, \mathbb{C})$ の cycle とする。

Example 1 (smooth Fano polytope に付随する周期積分)

3 次元 0 番目 smooth Fano polytope $P_{3,0}$ に付随する周期積分は、$P_{3,0}$ の頂点が $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(-1,-1,-1)\}$ より

$$F_{3,0}(x) = \int_C (x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3 + x_4t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1})^{-1} t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} dt_1dt_2dt_3$$

である。この積分は、行列 A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおいた時の A-超幾何積分であり、列ベクトル $\beta = (-1,0,0,0)^T$ として、A-超幾何微分方程式系 $H_A(\beta)$ を満たすことがわかる。

2　D 加群による積分アルゴリズム

ここでは D 加群の積分アルゴリズム ([9], [10], [12]) を復習し、周期積分の満たす微分方程式系の計算に用いることができることを説明する。

多項式係数微分作用素環を

$$D = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, \partial_1, \ldots, \partial_m, \partial_{m+1}, \ldots, \partial_n \rangle$$

$$D' = \mathbb{C}\langle x_{m+1}, \ldots, x_n, \partial_{m+1}, \ldots, \partial_n \rangle$$

とおく。ここで、∂_i は x_i についての微分作用素である。

holonomic 左 D イデアル I の $x_1, \cdots, x_m$ についての積分イデアル J とは

$$J = (I + \partial_1 D + \cdots + \partial_m D) \cap D'$$

なる左 D' イデアルである。大阿久氏により積分イデアルを計算するアルゴリズムが与えられている ([9], [10], [12])。そこでは、D におけるグレブナー基底、generic b 関数、加群のグレブナー基底が用いられる。

特に I が被積分関数の満たす微分方程式系の場合、その積分イデアルは、積分路がサイクルである積分の満たす微分方程式系を与える。例えば、積分

$$\int_C f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_m$$

(C は適切な m-cycle) の満たす微分方程式系を求めるには、$f(x)$ を零化する holonomic 左 D イデアル I を求めて、I の $x_1, \cdots, x_m$ についての積分イデアル J を計算する。積分イデアル J の元 P は、

$$P = P_0 + \partial_1 P_1 + \cdots \partial_m P_m \quad (P_0 \in I, P_1, \cdots, P_m \in D)$$

と表される。この P を積分に作用させれば

$$\begin{aligned} P \cdot \int_C f(x) dx_1 \cdots dx_m &= \int_C (P \cdot f(x)) dx_1 \cdots dx_m \quad (P \in D' \text{ より}) \\ &= \int_C (P_0 + \partial_1 P_1 + \cdots \partial_m P_m) \cdot f(x) dx_1 \cdots dx_m \\ &= \int_C (\partial_1 P_1 + \cdots + \partial_m P_m) \cdot f(x) dx_1 \cdots dx_m \quad (P_0 \in I \text{ より}) \\ &= \int_{\partial C} f(x) dx_1 \cdots dx_m = 0 \end{aligned}$$

となって、確かに積分を零化する。よって、積分イデアルの元たちが積分の満たす微分方程式系にあたる。

Example 2 (2 次元 smooth Fano polytope に付随する周期積分)

2 次元 smooth Fano polytope $P_{2,0}$ に付随する周期積分

$$F_{2,0}(x) = \int_C (x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_1^{-1} t_2^{-1} + x_4)^{-1} t_1^{-1} t_2^{-1} dt_1 dt_2$$

の満たす微分方程式系を D 加群による積分アルゴリズムにより計算するには、

1. 被積分関数

$$f_{2,0}(x,t) = (x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_1^{-1} t_2^{-1})^{-1} t_1^{-1} t_2^{-1}$$

の零化イデアル I を計算する。D 加群による多項式の零化イデアルの計算アルゴリズム *([8])* により計算できる。

2. 零化イデアル I に対して、t_1, t_2 についての積分イデアル

$$J = (I + \partial_{t_1} D + \partial_{t_2} D) \cap D'$$

を計算する。ここで、

$$D = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4}, \partial_{t_1}, \partial_{t_2}\rangle, D' = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4}\rangle$$

である。

アルゴリズムより得られた積分イデアル J の生成元は

$(x_4^3 + 27x_1x_2x_3)\partial_{x_4}^2 + 3x_4^2\partial_{x_4} + x_4,\ 9x_2x_3\partial_{x_4}^2 - x_4^2\partial_{x_1}\partial_{x_4} - x_4\partial_{x_1},\ 9x_1x_3\partial_{x_4}^2 - x_4^2\partial_{x_2}\partial_{x_4} - x_4\partial_{x_2},$
$-9x_1x_2\partial_{x_4}^2 + x_4^2\partial_{x_3}\partial_{x_4} + x_4\partial_{x_3},\ -3x_3\partial_{x_4}^2 - x_4\partial_{x_1}\partial_{x_2},\ -3x_2\partial_{x_4}^2 - x_4\partial_{x_1}\partial_{x_3},\ -3x_1\partial_{x_4}^2 - x_4\partial_{x_2}\partial_{x_3},$
$-\partial_{x_4}^3 + \partial_{x_1}\partial_{x_2}\partial_{x_3},\ x_4\partial_{x_4} + 3x_1\partial_{x_1} + 1,\ -x_4\partial_{x_4} - 3x_2\partial_{x_2} - 1,\ x_4\partial_{x_4} + 3x_3\partial_{x_3} + 1$

最後の行の *4* つの元は、A-超幾何微分方程式系 $H_A(\beta)$ *(ここで、*$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = (-1, 0)^T$*)*
の生成するイデアルに入るが、それ以外の元は入らない。

3 計算結果と近似積分アルゴリズム

3.1 積分アルゴリズムによる計算結果

積分アルゴリズムを対象の周期積分に適用したタイミングデータは次のようになった。(計算機環境 CPU:Xeon X5470 (3.33GHz), Memory:3.6GB, 数式処理ソフト Risa/Asir ([14]), package : `nk_restriction.rr`)

Ann は、被積分関数の零化イデアルの計算 (大阿久氏の D 加群による多項式の零化イデアルの計算アルゴリズム ([8])) にかかった時間であり、残りの 3 列が積分アルゴリズムにかかった時間を表している (各列は積分アルゴリズムの各ステップに対応している)。ここで時間の単位は秒である。

dim	index	Ann	$<_{(-w,w)}$-GB and generic-b	base	GB
2	0	< 1	0.004	0.04	0.004
2	1	< 1	0.022	0.04	0.008
2	2	< 1	0.035	0.03	0.019
2	3	2	0.58	0.11	0.19
2	4	180	93	1.6	14
3	0	1	0.052	0.048	0.020
3	1	1	0.20	0.09	0.052
3	2	3	0.36	0.16	0.10
3	3	5	1.6	0.25	0.14
3	4	14	1.4	0.25	0.013
3	5	4165	1710	726	5726
3	6	2383	5037	1007	6194
3	7	135	92	87	257
3	8	1551	1618	499	2227
3	9	16	13	34	86
3	10	1492	852	183	994
3	11	6213	1588	406	1839
3	12	—	—	—	—
			………		
3	17	—	—	—	—

このアルゴリズムのボトルネックの 1 つとして、零化イデアルの計算部分 (Ann) が挙げられる。3 次元 12 番目以降のデータについては零化イデアルの計算部分で、もはや計算が困難である。そこで、零化イデアルの計算を近似に置き換えて、さらに計算を行うことを考える。

3.2 近似零化イデアルと近似積分アルゴリズム

有理関数の零化イデアルについて、近似零化イデアルを導入する。

Definition 1 (近似零化イデアル)
多項式 f, g について、有理関数 $\frac{f}{g}$ の階数 i 次近似零化イデアルとは、零化イデアル $\mathrm{Ann}_D \frac{f}{g}$ の元で、階数が i 次以下 *(*すなわち $(0,1)$ 重みが i 次以下*)* のもの全体が生成する D のイデアルのこととし、$\mathrm{Ann}_D^{(i)} \frac{f}{g}$ で表す。

有理関数の近似零化イデアルの計算を、多項式の syzygy を使って計算する方法が知られている。

Algorithm 1 (近似零化イデアルの計算 [3])
入力 *:* 有理関数 $\frac{f}{g}$, 近似階数 i
出力 *:* i 階近似零化イデアル $\mathrm{Ann}_D^{(i)} \frac{f}{g}$ の生成元

1. i 階以下の微分作用素 $\partial^\alpha \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le i)$ を全て生成。微分作用素 $P = \sum a_\alpha \partial^\alpha$ とおく。ただし、a_α は未知の多項式。
2. 上で生成した微分作用素 P を、$\frac{f}{g}$ に作用させて得られる有理関数の分子が 0 になるように未知の多項式 a_α を決める。それには、多項式環における *syzygy* 計算を用いればよい。*(*詳しくは例にて述べる*)*

Example 3 (近似零化イデアルの計算例)
2 次元 *smooth Fano polytope* $P_{2,0}$ に付随する周期積分の被積分関数

$$f_{2,0}(t,x) = \frac{1}{x_1 t_1^2 t_2 + x_2 t_1 t_2^2 + x_3 + x_4 t_1 t_2}$$

の *1* 階近似零化イデアルを計算する。

1. $P = a_1\partial_{t_1} + a_2\partial_{t_2} + a_3\partial_{x_1} + a_4\partial_{x_2} + a_5\partial_{x_3} + a_6\partial_{x_4} + a_7$ *(*a_i は未知の多項式*)* を $f_{2,0}(t,x)$ に作用させると、その分子 $n(t,x)$ は
$$\begin{aligned} n(t,x) =& (-t_2x_4 - t_2^2x_2 - 2t_1t_2x_1)a_1 + (-t_1x_4 - 2t_1t_2x_2 - t_1^2x_1)a_2 - \\ & t_1^2t_2a_3 - t_1t_2^2a_4 - a_5 - t_1t_2a_6 + (t_1t_2x_4 + x_3 + t_1t_2^2x_2 + t_1^2t_2x_1)a_7 \end{aligned}$$
2. $n(t,x) = 0$ となるように a_i を決める。それには次のような計算を行う。$n(t,x)$ の a_i の各係数を c_i とする。多項式環における *syzygy* である $\mathrm{Syz}(c_1, \cdots, c_7)$ の生成元を多項式環のグレブナ基底計算を使って計算すると、
$$\begin{aligned} &(-1,0,0,0,t_2x_4 + t_2^2x_2, 2x_1, 0), (0,-1,0,0,t_1x_4 + t_1^2x_1, 2x_2, 0), (0,0,-1,0,0,t_1,0), \\ &(0,0,0,-1,0,t_2,0), (0,0,0,0,-t_1t_2,1,0), (0,0,0,0,x_3, x_4 + t_2x_2 + t_1x_1, 1), \\ &(0,0,0,0,0,t_1t_2x_4 + x_3 + t_1t_2^2x_2 + t_1^2t_2x_1, t_1t_2) \end{aligned}$$

これに対応する微分作用素

$$\begin{aligned}&-\partial_{t_1}+(t_2x_4+t_2^2x_2)\partial_{x_3}+2x_1\partial_{x_4}, -\partial_{t_2}+(t_1x_4+t_1^2x_1)\partial_{x_3}+2x_2\partial_{x_4}, -\partial_{x_1}+t_1\partial_{x_4},\\ &-\partial_{x_2}+t_2\partial_{x_4}, -t_1t_2\partial_{x_3}+\partial_{x_4}, x_3\partial_{x_3}+(x_4+t_2x_2+t_1x_1)\partial_{x_4}+1,\\ &(t_1t_2x_4+x_3+t_1t_2^2x_2+t_1^2t_2x_1)\partial_{x_4}+t_1t_2\end{aligned}$$

が *1* 階近似零化イデアルの生成元になっている。

何階まで近似零化イデアルを計算すれば、本当の零化イデアルに等しくなるかということが問題になるが、例えば、[2] では、2 変数の多項式 f が weighted homogeneous であれば、$\mathrm{Ann}_D^{(1)}\frac{1}{f}=\mathrm{Ann}_D\frac{1}{f}$ を示している。

零化イデアルを大阿久氏のアルゴリズムを使い完全に計算するのに比べて、1, 2 階の近似零化イデアルの計算は高速である。 被積分関数の零化イデアルの代わりに近似零化イデアルを使い、積分アルゴリズムを適用する。得られる積分イデアルは、本当の零化イデアルを使った場合よりも小さくなる可能性がある。これを近似積分アルゴリズムと呼ぶことにする。

Algorithm 2 (近似積分アルゴリズム)

入力 : $\frac{f}{g}$ を有理関数、m を自然数

出力 : $\mathrm{Ann}_D\frac{f}{g}$ の積分イデアルの部分イデアル

1. $m \leftarrow 1$
2. $J=\mathrm{Ann}_D^{(m)}\frac{f}{g}$ を計算 *(Algorithm 1)*
3. J が *holonomic* なら J に積分アルゴリズムを適用し、その積分イデアルを返す。
   J が *holonomic* でなければ m を 1 増やして *step 2* へ。

有理関数 $\frac{f}{g}$ は *holonomic* 関数であるから、零化イデアル $\mathrm{Ann}_D\frac{f}{g}$ は *holonomic* であり、m を十分大きくすれば、$\mathrm{Ann}_D^{(m)}\frac{f}{g}=\mathrm{Ann}_D\frac{f}{g}$ となり *holonomic* となるので、上の手続きは有限回で終了する。

Example 4 (積分イデアルと近似積分イデアルに差が出る例)

Castro, Ucha([2]) からの例より、2 変数多項式 $f=x^4+y^5+xy^4$ *(Reiffen curves)* について、有理関数 $\frac{1}{f}$ の近似零化イデアルと零化イデアルには

$$\mathrm{Ann}_D^{(1)}\frac{1}{f}\subsetneq\mathrm{Ann}_D^{(2)}\frac{1}{f}=\mathrm{Ann}_D\frac{1}{f}$$

のような差がある。

そこで、有理関数 $\frac{1}{f}$ の x についての 1 階の近似積分イデアル $J^{(1)}$ *(*すなわち $\mathrm{Ann}_D^{(1)}\frac{1}{f}$ の積分イデアル*)* と、正確な積分イデアル J を計算すると、

$$J^{(1)}=D\cdot\{yP\},\ J=D\cdot\{P\}$$

ただし、

$$P=(-27y^4+256y^3)\partial_y^3+(-432y^3+3456y^2)\partial_y^2+(-1896y^2+12336y)\partial_y-2184y+10920$$

この場合、積分イデアルは 1 階近似積分イデアルより真に大きくなる。

3.3 近似積分アルゴリズムによる計算結果

対象としている周期積分 (3 次元 5 番目以降の smooth Fano polytope に付随する周期積分) に対して、近似積分アルゴリズム (Algorithm 2) を適用した結果は次の通りである。AppAnn の列が 1 階の近似零化イデアルの計算にかかった時間であり、それ以降の列が積分アルゴリズムにかかった時間である。

dim	index	AppAnn	$<_{(-w,w)}$-GB and generic-b	base	GB
3	5	0.12	1253	10	5.8
3	6	0.18	11781	2130	67
3	7	0.18	32	2.3	0.71
3	8	0.18	4014	69	8.7
3	9	0.18	9.1	1.5	0.34
3	10	0.18	248	3.4	1.8
3	11	0.21	572	6.9	4.3
3	12	0.21	—	—	—
			....		
3	17	0.21	—	—	—

1 階の近似零化イデアルの計算にかかる時間は一瞬であるが、それ以降の積分アルゴリズムの計算部分にかなり時間がかかるようになることがわかる。零化イデアルをそのまま使った場合に比べて、計算は高速に行えるようになったことがわかる。しかし、3 次元 12 番目以降の計算はこの工夫を使ってもまだ計算は困難であり、これらの計算を如何にして行うかは今後の課題である。

これらの計算結果とその実行プログラムは、`http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/sfano` にて download 可能である。

参 考 文 献

[1] Batyrev, V. : Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebaic tori, Duke Mathematical Journal 69, no.2, 349-409, (1993)

[2] Castro-Jiménez, F.J., Ucha-Enríquez, J.M. : Explicit Comparison Theorems for $\mathcal{D}$-modules, Journal of Symbolic Computation 32, 677-685, (2001)

[3] Castro-Jiménez, F.J., Ucha-Enríquez, J.M. : Gröbner bases and logarithmic $\mathcal{D}$-modules, Journal of Symbolic Computation 41, 317-335, (2006)

[4] Ishige, T. : An Isomorphic correspondance between the Hilbert modular group and the unimodular group of a domain of Type IV, Technical Report, Chiba University, (2008)

[5] Ishige, T. : A Family of K3 Surfaces connected with the Hilbert Modular Group for $\sqrt{2}$ and the GKZ Hypergeometric Differential Equation, preprint, (2010)

[6] Nagano, A. : Period differential equations for families of K3 surfaces derived from some 3 dimentional reflexive polytopes, preprint, arXiv:1001.5312, (2010)

[7] Nakayama, H., Takayama, N. : Computing Differential Equations for Integrals Associated to Smooth Fano Polytopes, preprint, arXiv:1012.5353, (2010)

[8] Oaku, T. : Algorithm for the b-function and D-modules asscociated with a polynomial, Journal of Pure and Applied Algebra 117/118, 495-518, (1997)

[9] Oaku, T. : Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, Advances in Applied Mathematics 19, 61-105, (1997)

[10] Oaku, T. Takayama, N. : An Algorithm for de Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation, Journal of Pure and Applied Algebra 139, 201-233, (1999)

[11] Øbro, M. : Classification of Smooth Fano Polytopes, PhD thesis, Aarhus University, (2007)

[12] Saito, M., Sturmfels, B., Takayama, N. : *Groebner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, (2000)

[13] Stienstra, J. : Resonant hypergeometric systems and mirror symmetry, Integrable Systems and Algebraic Geometry (Proceedings of the Taniguchi Symposium 1997), 412-452, World Scientific, (1998)

[14] Noro, M. et al: Risa/Asir, `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir`